**Bài 5: Vị trí tương đối của hai đường tròn**

**A. Kiến thức cần nhớ**



Cho hai đường tròn  và . Khi đó ta có các trường hợp:

1)  và  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  (hình 1) 

- Có  là dây chung của  và 

-  là đường trung trực của 

-  và  có 2 tiếp tuyến chung

2)  và  tiếp xúc nhau

a) Tiếp xúc ngoài (hình 2) 

- Tiếp điểm thuộc 

-  và  có 3 tiếp tuyến chung

b) Tiếp xúc trong (hình 3) 

- Tiếp điểm thuộc 

-  và  có 1 tiếp tuyến chung

\*) Đặc biệt: Cho hai đường tròn  và (O’) tiếp xúc ngoài tại . Tiếp tuyến chung tròn tại  cắt tiếp tuyến chung ngoài tại  (,  là tiếp điểm). Chứng minh rằng:

1)  thẳng hàng

2) 

3) 

4)  vuông tại 

5)  vuông

6) 

Chứng minh:

Theo tính chất 5)  vuông tại 

Mà  là đường cao của tam giác



Theo tính chất 3) 

3)  và  không có điểm chung

a) Hai đường tròn nằm ngoài nhau (hình 4) 

-  và  có 4 tiếp tuyến chung (2 tiếp tuyến chung trong, 2 tiếp tuyến chung ngoài)

b) Hai đường tròn đựng nhau (hình 5) 

-  và  không có tiếp tuyến chung

c) Hai đường tròn đồng tâm (hình 6) 

**B. Bài tập vận dụng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** | |
| Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại  và . Vẽ  và  theo thứ tự là đường kính của  và  a) Chứng minh rằng 3 điểm  thẳng hàng  b) Đường thẳng  cắt  tại  , đường thẳng  cắt  tại  . Chứng minh rằng bốn điểm  cùng thuộc 1 đường tròn  c) Một đường thẳng  thay đổi luôn đi qua  và cắt  tương ứng tại  sao cho  nằm giữa . Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  để  đạt giá trị lớn nhất. |  |
| **Lời giải**  a) Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  thẳng hàng (đpcm)  b) Dễ thấy  4 điểm  cùng thuộc một đường tròn đường kính  (đpcm)  c) Gọi  là trung điểm của ; kẻ  là hình thang  có  là đường trung bình  mà  đạt GTLN bằng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** | |
| Cho  và  ở ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  và tiếp tuyến chung trong . Với  và . Gọi  là giao điểm của  a) Chứng minh rằng:    b) Chứng minh |  |
| **Lời giải**  a)  là phân giác của  Tương tự ta có  là phân giác của    Mặt khác  (g-g)  b) Ta có:  (phụ ), mà    Mà  (đpcm). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** | |
| Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại A và B. Gọi  là dây cung của  tiếp xúc với ,  là dây cung của  tiếp xúc với . Gọi  là điểm đối xứng của  Qua  a) Chứng minh rằng 4 điểm  cùng thuộc 1 đường tròn  b) Chứng minh rằng: Khi hai đường tròn  và  thay đổi nhưng luôn đi qua 2 điểm cố định  thì tâm của đường tròn đi qua bốn điểm  sẽ thuộc 1 đường tròn cố định. |  |
| **Lời giải**  a) Kẻ đường kính  của  và  thẳng hàng  Gọi  là trung điểm của , ta có:  là trung điểm của  Trong tam giác , có  là đường trung bình  Mà  Tương tự ta có  là đường trung bình của  Từ (1)(2)(3)  (đpcm)  b) Do , mà  thuộc đường thẳng vuông góc với  tại  (đpcm). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** | |
| Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  và . Đường thẳng  cắt  và  lần lượt tại  và ,  cắt  và  lần lượt tại  và  a) Chứng minh rằng 3 đường thẳng  và  đồng quy tại  b) Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp đường tròn  c) Gọi  là tiếp tuyến chung của  và  với  và .  cắt  tại . Chứng minh rằng . |  |
| **Lời giải**  a) Dễ thấy  thẳng hàng và    là ba đường cao của  nên chúng đồng quy tại  b) Dễ thấy  cùng thuộc một đường tròn đường kính  c) Ta có  (1)  Tương tự ta có:  (2)  Từ (1)(2)  (đpcm). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5:** | |
| Cho hai đường tròn  và (O’) cắt nhau tại  và . Vẽ ,  thứ tự là đường kính của hai đường tròn  và (O’)  a) Chứng minh ba điểm , ,  thẳng hàng  b) Đường thẳng  cắt đường tròn  tại  đường thẳng  cắt đường tròn  tại  . Chứng minh  điểm  cùng nằm trên một đường tròn  c) Một đường thẳng  thay đổi luôn đi qua  cắt  và (O’) thứ tự tại  và . Xác định vị trí của  để  đạt giá trị lớn nhất. |  |
| **Lời giải**  a) Do  thẳng hàng  b) Do  cùng thuộc một đường tròn  c) Gọi  là trung điểm của .  là điểm cố định  Gọi  là trung điểm của  Do ,  cùng vuông góc với  nên  là hình thang vuông  Nên  Nhưng  Vậy  đạt giá trị lớn nhất khi đường thẳng  vuông góc với . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6:** | |
| Cho tam giác vuông  (vuông tại  cố định nội tiếp đường tròn .  là một điểm di động trên cung tròn  khồng chứa .  là giao điểm của  và . Chứng minh giao điểm (khác  của đường tròn  với đường tròn ngoại tiếp tam giác  là cố định. |  |
| **Lời giải**  Gọi  là giao điểm thứ hai của giao điểm giữa đường thẳng qua  vuông góc với  và đường tròn  Rõ ràng  là đường trung trực của đoạn  và  là điểm cố định  Ta có:  (quan hệ vuông góc ở tâm và góc nội tiếp)  Mà  nên dễ thấy  Từ (1)(2) ta suy ra . Vậy nên  điểm  cùng thuộc một đường tròn.  Tức là đường tròn  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  cùng đi qua điểm  cố định. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 7:** | |
| Cho tam giác đều  nội tiếp đường tròn . Gọi  là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn  và tiếp xúc với hai cạnh ,  theo thứ tự tại  và  a) Chứng minh rằng ba điểm , ,  thẳng hàng  b) Tính bán kính của đường tròn  theo |  |
| **Lời giải**  a) Gọi  là tiếp điểm của hai đường tròn. Ta có  thẳng hàng  Kẻ tiếp tuyến chung tại  cắt ,  ở ,  Ta có  đều  là giao điểm của các đường trung trực của tam giác  Suy ra ,  lần lượt là trung điểm của ,  Ta lại có  là trung điểm của  nên , ,  thẳng hàng  b) Vì  đều nên O’ là trọng tâm của tam giác  Do đó . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 8:** | |
| Cho đường tròn  đường kính , đường tròn (O’) tiếp xúc trong với đường tròn  tại . Các dây ,  của đường tròn  tiếp xúc với đường tròn (O’) theo thứ tự tại , . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác . |  |
| **Lời giải**  Do tính đối xứng nên  Ta có  (cùng bằng ) nên  (tính chất của tia phân giác)  Suy ra  lại có  Điểm  là giao điểm của các đường phân giác của các góc  và  của tam giác  nên  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 9:** | |
| Cho đường tròn tâm  đường kính . Gọi  là bán kính vuông góc với ,  là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại . Gọi  là đường tròn tiếp xúc vưới nửa đường tròn tâm  và tiếp xúc với đường kính . Chứng minh rằng điểm  cách đều đường thẳng  và điểm . |  |
| **Lời giải**  Giả sử đường tròn  tiếp xúc với  tại  và tiếp xúc với  tại  Khi đó ba điểm  thẳng hàng  Tiếp tuyến của đường tròn  tại  cắt  ở  và cắt  ở  Ta có  Suy ra tứ giác  là hình chữ nhật  Do đó  và  Mặt kkác  Vậy  cách đều  và . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 10:** | |
| Cho nửa đường tròn đường kính ,  là một điểm trên nửa đường tròn sao cho ,  là hình chiếu của  trên . Gọi  là trung điểm của , đường tròn  cắt nửa đường tròn tại  và cắt cạnh ,  theo thứ tự tại  và , đường thẳng  cắt  tại . Chứng minh rằng  là hình chữ nhật, từ đó suy ra  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  là đường kính của đường tròn  Vậy tứ giác  là hình chữ nhật.  là trung điểm của , tức là  thẳng hàng  Gọi  là trung điểm của , ta có  Vì đường tròn  và đường tròn  cắt nhau tại  điểm  và  nên  Theo giả thiết  là trực tâm  Từ (2)(3) suy ra  thẳng hàng  Từ (1)(4) suy ra  thẳng hàng (đpcm). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 11:** | |
| Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài tại  và hai điểm  lần lượt trên  và  sao cho . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Gợi : Giả thiết  ta nghĩ đến điểm  là giao điểm của  và đường tròn  Ta lần lượt có  thẳng hàng  , từ đó sẽ suy ra kết quả  Điểm phụ thuộc  là “chìa khóa” để giải toán.  Hướng dẫn giải:  Vẽ đường kính  của đường tròn  Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  Vì  thẳng hàng  Xét  có  cân tại  Chứng minh tương tự ta có , mà  (đối đỉnh)  Nên  so le trong  Vậy . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 12:** | |
| Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài tại . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  a) Tính  b) Tính  c) Gọi  là giao điểm của  với đường tròn tâm . Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng  d) Tính |  |
| **Lời giải**  a) Kẻ tiếp tuyến chung trong tại , cắt  tại  Ta có  b) Ta có  (tia phân giác của hai góc kề bù) nên  Tam giác  vuông tại , đường cao  nên  c) Ta có  vuông tại  nội tiếp đường tròn  nên  là đường kính  d) Tam giác  vuông tại  nên:  Tương tự tính được . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 13:** | |
| Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài tại , góc vuông  thay đổi luôn đi qua , cắt đường tròn  và  tại  và . Gọi  là hình chiếu của  trên . Xác định vị trí của  để  có độ dài lớn nhất. |  |
| **Lời giải**  Kẻ đường kính , theo giả thiết  thẳng hàng    Từ  kẻ    Do đó  lớn nhất khi , đẳng thức xảy ra khi  là tipp tuyến chung của hai đường tròn  và . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 14:** | |
| Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài  ( thuộc ,  thuộc (O’)). Đường tròn  tiếp xúc với  và hai đường tròn  và (O’). Chứng minh rằng , từ đó suy ra . |  |
| **Lời giải**  Giả sử  từ O’ kẻ đường thẳng song song với  cắt  tại  Suy ra tứ giác ABO’D là hình chữ nhật  Ta có  Theo định lí pitago ta có    Theo giả thiết, đường tròn  tiếp xúc với  và hai đường tròn  và (O’), gọi  là tiếp điểm của đường tròn  với  Tương tự chứng minh trên suy ra  và  , chia cả hai vế cho  được . | |

**Bài 6: Vẽ đường phụ**

\*) Các đường hay vẽ thêm thường là dây cung của đường tròn, đường kính của đường tròn, tiếp tuyến của đường tròn, tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc nhau.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** Vẽ đường phụ là dây cung | |
| Cho đường tròn tâm , dây   ( và điểm  nằm trong góc ). Gọi  là trung điểm của . Khoảng cách từ  đến  bằng  a) Chứng minh rằng  cân tại  b) Tính bán kính của đường tròn. |  |
| **Lời giải**  a) Từ  hạ  Chứng minh  là trung điểm của  Vì , mà  là trung điểm của  Suy ra  là trung điểm của  Xét  vuông tại  là trung điểm của  b)  thẳng hàng vì cùng thuộc trung trực của  . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** Vẽ đường phụ là đường kính | |
| Cho hai đường tròn  và  với  tiếp xúc ngoài tại  và hai điểm  lần lượt trên  và (O’) sao cho . Chứng minh rằng . |  |
| **Lời giải**  Kẻ đường kính  Vậy , mà  nằm ở vị trí so le trong . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** Vẽ thêm tiếp tuyến của đường tròn | |
| Cho nửa đường tròn  đường kính , bán kính  vuông góc với .  là điểm trên nửa đường tròn  ( khác , . Tiếp tuyến của nửa đường tròn  tại  cắt  và cắt tiếp tuyến tại  của nửa đường tròn tâm  lần lượt tại  và .  cắt  tại . Chứng minh rằng . |  |
| **Lời giải**  Gọi . là giao điểm của tiếp tuyến  với tiếp tuyến tại  Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau  Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau  lần lượt là phân giác của  và , mà hai góc này kề bù  Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông  vuông tại , có:    Ta đi chứng minh  Xét  có ,  là trung điểm của  là trung điểm của  Suy ra . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** | |
| Cho đường tròn tâm , đường thẳng  cố định đi qua . Lấy điểm  bất kì trên đường thẳng  và ở ngoài đường tròn . Vẽ đường tròn tâm  bán kính . Vẽ tiếp tuyến chung  của hai đường tròn ( nằm trên ,  nằm trên ). Chứng tỏ rằng khi  di động trên đường thẳng  và ở ngoài đường tròn  thì  di động trên một đường cố định. |  |
| **Lời giải**  Từ  kẻ tiếp tuyến với đường tròn ,  là tiếp điểm  Ta đi chứng minh đường thẳng  là cố định, suy ra chứng minh  cố định  Nhận xét:  thuộc đường tròn  Để chứng minh  cố định ta chứng minh ba điểm  thẳng hàng  Ta có  Vậy  nằm trên hai tia đối nhau  và | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5:** Vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc | |
| Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại  và . Vẽ hình bình hành . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau tại  và  tại trung điểm  của  Theo giả thiết  là hình bình hành nên  cắt  tại  là trung điểm của  Xét , có  là đường trung bình | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6:** Vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc | |
| Cho hai đường tròn  và  có bán kính  và  tiếp xúc ngoài nhau. Một tiếp tuyến chung ngoài của  và  với các tiếp điểm lần lượt là  và . Tính bán kính của đường tròn  tiếp xúc với ,  và |  |
| **Lời giải**  Kẻ tiếp tuyến chung tại  cắt  tại    Theo tính chất tiếp tuyến  lần lượt là phân giác của hai góc kề bù  Xét hệ thức lượng trong tam giác    GỌi  bán kính , giả sử  tiếp xúc với  tại  Tương tự ta có  Vậy . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 7:** | |
| Cho đường tròn tâm  bán kính . Điểm  thuộc bán kính  và cách  là . Qua  kẻ dây  có độ dài . Tính các độ dài . |  |
| **Lời giải**  Kẻ  Ta có  Tam giác  vuông nên có  Tam giác  vuông nên  Do đó | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 8:** | |
| Cho tam giác ,  theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác  với các cạnh ;  là hình chiếu của  trên . Chứng minh  là tia phân giác của |  |
| **Lời giải**  Gọi  là hình chiếu của ,  trên  là các tiếp điểm nên  Suy ra tam giác  là tam giác cân    là tia phân giác của . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 9:** | |
| Cho đường tròn  nội tiếp tam giác  tiếp xúc với  tại . Vẽ đường kính   cắt  tại . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Vẽ tiếp tuyến  của đường tròn  ()    Gọi  là tiếp điểm của đường tròn  tiếp xúc với  là hai tia phân giác của hai góc kề bù  và  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)  Xét  và  có  (phụ với )  Do đó  Tương tự ta có    Trong  có , áp dụng hệ quả định lí Talét trong tam giác ta có  Tương tự có  Từ (1)(2) cho ta . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 10:** | |
| Cho tam giác  nhọn, nội tiếp đường tròn  ,  là trực tâm của tam giác . Vẽ  ( khác  và khác . Chứng minh |  |
| **Lời giải**  Gợi ý:  cho ta nghĩ tới  là đường trung bình của tam giác  ( là giao điểm của  và  Từ đó phát hiện ra rằng  là điểm đối xứng của  qua . Điểm  giúp ta tìm ra lời giải bài toán  Giải:  Vẽ đường kính  của đường tròn  Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  Từ  ( là trực tâm tam giác )    Chứng minh tương tự ta có  Tứ giác  có  Suy ra tứ giác  là hình bình hành.  Ta có  là trung điểm của  (định lí đường kính vuông góc với dây cung)  Hình bình hành  có  là trung điểm của  Suy ra  là trung điểm của  Xét  có  lần lượt là trung điểm của  Do đó  là đường trung bình của  Chú : kết quả trên đúng cho tam giác  bất kì. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 11:** | |
| Cho hai đường tròn  và (O’) tiếp xúc ngoài tại . Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài ,  với ,  thuộc , ,  thuộc (O’). Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Vẽ tiếp tuyến chung tại  của hai đường tròn  và (O’)  Tiếp tuyến này lần lượt cắt  ở  và  Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau ta có  Do đó  Mặt khác  là trục đối xứng của hình nên  đối xứng với  qua ,  đối xứng với  qua OO’ nên  Do đó  là hình thang  lần lượt là trung điểm của  nên  là đường trung bình của hình thang  Từ (1)(2) có | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 12:** | |
| Cho đường tròn  đường kính . Vẽ đường tròn tâm  cắt đường tròn  tại  và . Vẽ dây  của đường tròn  cắt đường tròn  ở . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Gọi  là giao điểm của  với đường tròn ,  là giao điểm của  với đường tròn  Xét  có  Ta có  Mặt khác  và  cắt nhau ở  và  là đường trung trực    Mà  và  đối xứng nhau qua  nên  và  đối xứng nhau qua  Do đó . Vậy | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 13:** | |
| Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại , . Hai điểm  và  nằm trên . Gọi  là điểm đối xứng của  qua ,  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Nối  với , ta có  là trung trực của  Gọi  là giao điểm của  và   trung điểm của  Xét  có  là trung điểm của  ( và  đối xứng qua ,  là trung điểm của  Do đó  là đường trùng bình của tam giác  Chứng minh tương tự ta có  Ta có , theo tiên đề Ơclít ta có  thẳng hàng. | |

**Bài 7: Tính toán các yếu tố của đường tròn**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Cho đường tròn 

+ Chu vi của đường tròn: 

: đường kính

: Bán kính

2. Diện tích của hình tròn: 

3. Lấy hai điểm  và có 

- Độ lớn của cung  có góc ở tâm bằng 



- Diện tích hình quạt có góc ở tâm bằng 



- Diện tích của hình viên phân: Là hình giới hạn bởi dây cung  và cung , có góc ở tâm bằng 



- Diện tích của hình vành khăn (hình xuyến)



**B. Bài tập vận dụng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** | |
| Cho ba đường tròn  tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một. Gọi  là tiếp điểm của  và ,  là tiếp điểm của  và . Tính độ dài cung nhỏ  của . |  |
| **Lời giải**  Ta có  Nhận thấy  vuông tại  Từ đó . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** | |
| Cho đường tròn  và hai đường kính ,  vuông góc với nhau. Vẽ cung tròn tâm , bán kính . Tính diện tích phần hình lưỡi liềm tạo bởi cung  của đường tròn tâm  và cung  (có chứa ) của đương tròn |  |
| **Lời giải**  Dễ thấy  Diện tích hình quạt  của đường tròn  là:  Diện tích  là:  DIện tích hình viên phân giới hạn bởi  và dây  của  là:    Vậy diện tích hình lưỡi liềm là: . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** | |
| Cho , đường thẳng  tiếp xúc với  tại . Từ điểm  trên đường tròn vẽ . Đường cao  của  cắt  tại  a) Chứng minh rằng  b) Chứng minh rằng  c) Biết rằng sđ. Tính diện tích hình giới hạn bởi dây cung và cung nhỏ |  |
| **Lời giải**  a) Ta có  (góc cso cạnh tương ứng vuông góc)  b) Ta có  cân tại  là phân giác    c)  Diện tích hình quạt giới hạn bởi  và cung , dây cung    Tính được  . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** | |
| Cho nửa đường tròn tâm , đường kính . Một điểm  thuộc nửa đường tròn  sao cho . Vẽ hai nửa đường tròn đường kính  và  ở phía ngoài . Chứng minh rằng , trong đó  là diện tichs hình trăng khuyết như hình vẽ. |  |
| **Lời giải**  Nửa hình tròn đường kính  có diện tích là  Từ đó, ta có  Lại có  (đp\text{cm}). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5:** | |
| Cho  và  tiếp xúc ngoià nhau tại . Vẽ các tiếp tuyến chung ngoài  với  và  a) Chứng minh rằng  b) Tính độ dài  c) Tính diện tích hình giới hạn bởi đoạn thẳng , cung nhỏ  của , cung nhỏ  của |  |
| **Lời giải**  a) Hạ  Trong tam giác vuông  có  (đp\text{cm})  b)  mà  ()    c)  (). | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bài 6:** | | |
| Cho điểm  thuộc đoạn thẳng  sao cho . Vẽ về  phía của  các nửa đường tròn có đường kính  và có tâm theo thứ tự là . Đường thẳng vuông góc với  tại  cắt  tại . Gọi  theo thứ tự là giao điểm của  với  và  a) Chứng minh rằng  b) Chứng minh rằng  là tiếp tuyến chung của  và  c) Tính độ dài đoạn thẳng  d) Tính diện tích hình giới hạn bởi  nửa đường tròn  e) Giả sử  di động trên . Tìm vị trí của  để diện tích hình thang  đạt giá trị lớn nhất. |  | |
| **Lời giải**  a) Dễ thấy  là hình chữ nhật (tứ giác có ba góc vuông)    b) Ta có  Chứng minh tương tự ta có:  c) , mà  d)    lớn nhất thì  lớn nhất, mà  Dấu “=” xảy ra . | | |
| **Bài 7:** | | |
| Từ điểm  nằm ngoài , kẻ  tiếp tuyến  với . Từ  điểm  trên cung nhỏ . Kẻ một tiếp tuyến với  cắt  lần lượt tại  và  a) Chứng minh rằng khi  chuyển động trên cung nhỏ  thì chu vi  có giá trị không đổi  b) Cho  và bán kính của  là . Tính độ dài  và diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi  tiếp tuyến  và cung nhỏ . | |  |
| **Lời giải**  a) Ta có    b) Theo giả thiết    Ta có  (). | | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 8:** | |
| Cho đường tròn tâm , đường kính  và có bán kính . Gọi  là trung điểm của . Vẽ dây  tại . Lấy điểm  Trên đoạn .  cắt đường tròn tại điểm thứ hai là  a) Chứng minh rằng  b) Tính độ dài cùng nhỏ  khi  (tính chính xác đến  chữ số thập phân sau dấu phẩy). |  |
| **Lời giải**  a) Dễ thấy sđ sđ  (gg)    b) Nhắc lại  tan  (\text{cm}). | |

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ DẠNG TOÁN

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** | |
| Cho đường tròn , dây  cố định () và điểm  di động trên cung lớn  sao cho tam giác  có ba góc nhọn. Các đường cao  và  của tam giác  cắt nhau ở .  a) Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp  b) Giải sử , hãy tính khoảng cách từ tâm  đến cạnh  theo  c) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ qua  và vuông góc với  luôn đi qua một điểm cố định. |  |
| **Lời giải**  b) Kẻ  c) Ta có  (cùng phụ với )  (góc nội tiếp chắn cung  Từ đó  Vậy đường thẳng qua  vuông góc với  luôn đi qua tâm  cố định. | |



|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** | |
| Cho  cân tại ,  là tâm đường tròn nội tiếp,  là tâm đường tròn bàng tiếp góc ,  là trung điểm của  a) Chứng minh  điểm  cùng thuộc một đường tròn tâm  b) Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn  c) Tính bán kính của đường tròn , biết |  |
| **Lời giải**  b) Chứng minh được  Vậy  là tiếp tuyến của  c) Gọi  lần lượt là tiếp điểm của  Với cạnh . Gọi  là tiếp điểm của  với đường thẳng  Ta có  Như vậy, tính được  Đặt  là bán kính của ,  là bán kính của  Trong tam giác vuông  có:    Tương tự, trong tam giác vuông  ta có  Vậy bán kính của  là | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** | |
| Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài  với  thứ tự là các tiếp điểm thuộc đường tròn  và (O’)  a) Chứng minh  b) Tính  theo  c) Gọi  là giao điểm của đường thẳng  và đường tròn  (), vẽ tiếp tuyến  với đường tròn  (). Tính  theo  và |  |
| **Lời giải**  a) Kéo dài  cắt  tại điểm thứ hai là  Vì  Mà  Không mất tính tổng quát, giả sử . Khi đó  ănmf giữa O’ và  và  Từ đó  c) Dễ thấy  thẳng hàng  Trong hình thang vuông  ta có:    Trong tam giác vuông  ta có: . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** | |
| Cho nửa đường tròn  với đường kính . Dây  song song với  ( thuộc cung . Cho biết chu vi hình thang  bằng . Tính độ dài các cạnh của hình thang |  |
| **Lời giải**  Dễ thấy  là hình thang cân  Hạ  vuông góc với  Đặt  Từ  Ta có  Tam giác  vuông tại  nên  Vậy . | |

**Bài 8: Luyện tập**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** Chuyên Bình Phước, năm học 2018 | |
| Cho đường tròn  và điểm  nằm bên ngoài , kẻ các tiếp tuyến  và cát tuyến  không đi qua  ( nằm giữa  và )  a) Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp  b)  c) Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng  là tia phân giác của . |  |
| **Lời giải**  a) Dễ thấy  cùng thuộc đường tròn đường kính  Vậy tứ giác  nội tiếp  b) Ta có  (gg)  const  c) Giả sử tia  nằm giữa  và  Ta có:  (gg)  tứ giác  là tứ giác nội tiếp  Mà  (phụ với hai góc bằng nhau)  là phân giác của . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** Chuyên Lê Hồng Phong, năm học 2015 | |
| Cho  vuông tại , đường cao . Đường tròn tâm  đường kính  cắt cạnh  lần lượt tại  và . Gọi  là trung điểm của . Gọi  là giao điểm của  và  1) Chứng minh rằng:  a)  b) Tứ giác  nội tiếp  2) Chứng minh rằng:  a)  b)  3) Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm thứ hai của  và . Chứng minh rằng . |  |
| **Lời giải**  1) a) Dễ thấy  b) Từ  cùng thuộc một đường tròn  Hoặc  nội tiếp.  2) a) Ta có  ( cân tại  , mà  (phụ )  (gg)  b) , mà    3) Theo  1b) tứ giác  nội tiếp  (\*)  Lại có tứ giác  nội tiếp  (\*\*)  Từ (\*) và (\*\*) cùng thuộc một đường tròn  Mà  thuộc đường tròn đường kính . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, năm học 2018 | |
| Cho đường tròn  và  là một dây cung không đi qua . Gọi  là trung điểm của . Trên tia đối của tia  lấy điểm  khác . Vẽ các tiếp tuyến  với  và tiếp điểm thuộc cung nhỏ  a) Chứng minh rằng  nội tiếp đường tròn  b) Chứng minh rằng  c) Đường thẳng  cắt cung nhỏ  của  tại . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng  cân tại .  d) Đường thẳng  cắt đường thẳng  tại . Chứng minh rằng . |  |
| **Lời giải**  a) Ta có  đp\text{cm}  b)  c) Ta có sđ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)    Mà  cân tại  (đp\text{cm}). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** | |
| Cho  có ba góc nhọn. Kẻ  tiếp tuyến  và . Trên nửa đường tròn đường kính  không chứa  và  lấy điểm  bất kỳ. Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên . Tìm  của tổng sau |  |
| **Lời giải**  Lấy  trên nửa đường tròn đường kính  có chứa  sao cho  Gọi  (gg)    Tương tự ta có:  (gg)    Từ (1)(2)  đạt   khi  nằm chính giữa cung . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5:** Chuyên TPHCM, năm học 2015 | |
| Cho tam giác  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn . Gọi  là trung điểm của  và  là điểm đối xứng của  qua . Đường thẳng qua  vuông góc với  cắt đường thẳng qua  vuông góc với  tại . Kẻ đường kính . Chứng minh rằng:  a)  b)  đi qua trung điểm của đường cao  của tam giác |  |
| **Lời giải**  a) Ta có  (cùng phụ với )  lần lượt là điểm đối xứng của  qua  nên  Ta lại có  và  Từ (1)(2) suy ta    b) Gọi  là giao điểm của  và  Dễ thấy  Vậy để chứng minh  đi qua trung điểm của , ta sẽ chứng minh  là trung điểm của  Thật vậy, ta có theo phần a) thì    Mà  (chắn cung    là trung điểm của  nên  là trung điểm của . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6:** Chuyên Khánh Hòa, năm học 2015 | |
| Cho tam giác  vuông tại . Hai đường tròn  và  cắt nhau tại điểm thứ hai là . Vẽ đường thẳng  bát kì qua  cắt đường tròn  tại  và cắt đường tròn  tại  ( nằm giữa  và . Tiếp tuyến tại  của đường tròn  và tiếp tuyến tại  của đường tròn  cắt nhau tại .  a) Chứng minh  là tia phân giác của  b) Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng  c) Chứng minh bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn  d) Chứng minh rằng số đo góc  không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng . |  |
| **Lời giải**  c) Ta có  (hệ quả tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)  (hệ quả tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)  Suy ra  Trong tam giác  có  Hay  nội tiếp  d) Trong tam giác  có  mà  Ta lại có  (góc ở tâm và góc nội tiếp chắn một cung)  Mà  vuông tại  nên  (không đổi)  Vậy số đo góc  không phụ thuộc vào đường thẳng . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 7:** Chuyên Hùng Vương, năm học 2015 | |
| Cho hình vuông  tâm ,  là điểm di động trên cạnh . Trên cạnh  lấy điểm  sao cho , trên cạnh  lấy điểm  sao cho  a) Chứng minh rằng đường thẳng  là phân giác trong của góc , đường thẳng  là phân giác trong của góc . Từ đó suy ra ba điểm  thẳng hàng  b) Gọi  là chân đường vuông góc kẻ từ  tới đường thẳng . Chứng minh bốn điểm  cùng nằm trên một đường tròn.  c) Chứng minh rằng khi điểm  di động trên cạnh  thì đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định. |  |
| **Lời giải**  a) Dễ thấy  Vậy  là phân giác trong của góc  Chứng minh tương tự, ta có  là phân giác trong của góc  Từ đó chứng minh được  thẳng hàng  b) Tứ giác  nội tiếp đường tròn đường kính  nên  Tứ giác  nội tiếp đường tròn đường kính  nên  Tứ giác  nội tiếp đường tròn đường kính  nên  Suy ra  Ta thấy  và  cùng nhìn  dưới một góc vuông nên bốn điểm  cùng nằm trên một đường kính  c) Đường thẳng  cắt đường tròn đường kính  tại điểm thứ hai  Ta có  là điểm chính giữa cung  (không chứa ) của đường tròn đường kính  Hoặc, dễ thấy  là đường kính của đường tròn đường kính .  cố định nên  cố định. | |

|  |
| --- |
| **Bài 8:** |
| Cho đường tròn  và dây cung  cố định. Điểm  di động trên cung lớn  sao cho tam giác  nhọn. Gọi  là điểm đối xứng với  qua  và  là điểm đối xứng với  qua . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và  cắt nhau tại  ( không trùng . Gọi  là giao điểm của  và  a) Chứng minh  là phân giác trong góc  và tứ giác  nội tiếp  b) Xác định vị trí điểm  để diện tích tứ giác  lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo  c) Chứng minh  luôn đi qua điểm cố định. |
|  |
| **Lời giải**  a) Ta có  (vì cùng chắn cung  của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB)  Mà  (tính đối xứng) suy ra .  (vì cùng chắn cung  của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFC)  (tính chất đối xứng) suy ra  Mặt khác  (cùng phụ với )  Từ (1)(2)(3) suy ra  hay  là phân giác trong của  Gọi  lần lượt là các giao điểm của  và  và  với  Ta có  nên  Trong tam giác vuông  có  Tứ giác  có:  (đối đỉnh)  Ta có  (chứng minh phần a)  Mà  Nên tứ giácBHCK nội tiếp  b) Gọi  là đường tròn đi qua bốn điểm  Ta có dây cung ,  nên bán kính đường tròn  bán kính  của đường tròn  Gọi  là giao điểm của  và  thì  vuông góc với .  Kẻ  vuông góc với  ( thuộc )  Gọi  là giao điểm của  và  Ta có    Ta có  là dây cung của đường tròn  (không đổi)  Nên  lớn nhất khi  Giá trị lớn nhất  Khi  là đường kính của đường tròn  thì  trùng nhau suy ra  là trung điểm của  nên  cân tại . Khi đó  là điểm chính giữa cung lớn  c) Ta có  nên tứ giác  nội tiếp đường tròn.  Ta có  suy ra  hay  là phân giác góc  Theo phần  ta có  là phân giác góc  nên  thẳng hàng hay  đi qua  cố định. |